Méthode d'écart à la réciprocité et estimateur d'état pour l'identification de source polluante.

Antoine Tonnoir, *LMI INSA Rouen Normandie, France*

La motivation de ce travail réside dans l'identification de sources polluantes dans une rivière. Pour décrire la diffusion et la propagation du polluant, on considère un modèle classique de la littérature [4], une équation d'advection - diffusion [1] :

$$\partial_t u - \mathrm{div}(D\nabla u) + \mathbf{V} \cdot \nabla u = f \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{1}$$

Dans cette EDP, u représente la quantité de polluant, $\mathbf{V}$ le champ de vitesse décrivant le fluide, D est le tenseur de diffusion et f est la source polluante. On suppose que la source est très localisée et qu'elle s'arrête d'émettre après un temps $T_0 > 0$ inconnu (cela modélise typiquement une source accidentelle). Étant donné la mesure de u sur la frontière de sortie de la rivière durant la période $[0, T]$, l'objectif est de retrouver la position de la source le plus rapidement possible.

Ce problème a déjà été étudié dans la littérature [2, 1] et une méthode efficace de résolution se basant sur l'écart à la réciprocité a été proposée [3, 2]. L'un des principaux avantages de cette méthode est qu'elle permet de ramener le problème inverse à la détermination de lignes de niveaux de deux fonctions adjointes bien choisies. Ainsi, cela conduit à une procédure très simple pour l'identification de la position de la source polluante. Cependant, cette approche souffre de deux inconvénients. D'une part, elle nécessite des hypothèses fortes sur le champ de vitesse $\mathbf{V}$, la géométrie de la rivière Ω et le tenseur de diffusion D pour calculer analytiquement les fonctions adjointes. D'autre part, elle ne permet pas d'avoir une estimation à chaque instant (en "temps réel") de la position de la source polluante, ce qui ralentit la procédure d'identification.

Pour palier ces deux difficultés, nous proposons de considérer un calcul numérique des fonctions adjointes. Leurs définitions sont basées sur l'étude du cas particulier d'une rivière rectangulaire pour lequel on peut obtenir plusieurs intuitions physiques sur le problème. Ensuite, pour permettre une estimation en temps réel, nous proposons la construction d'un estimateur d'état peu couteux. En particulier, cela permet d'accélérer la procédure d'identification. Plusieurs illustrations numériques seront présentées durant l'exposé. La présentation est basée sur les résultats de l'article [5].

Références

[1] Xiaomao Deng, Zi-Ju Liao, and Xiao-Chuan Cai, *An efficient two-level overlapping domain decomposition method for recovering unsteady sources of 3d parabolic problems*, Computers & Mathematics with Applications **111** (2022), 98–108.

[2] A El Badia, Tuong Ha-Duong, and A Hamdi, *Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation : application to a pollution source problem*, Inverse Problems **21** (2005), no. 3, 1121.

[3] Adel Hamdi and Antoine Tonnoir, *Dispersion–current adjoint functions for monitoring accidental sources in 3d transport equations*, Inverse Problems in Science and Engineering **29** (2021), no. 10, 1445–1476.

[4] K Kachiashvili, D Gordeziani, R Lazarov, and D Melikdzhanian, *Modeling and simulation of pollutants transport in rivers*, Applied mathematical modelling **31** (2007), no. 7, 1371–1396.

[5] Antoine Tonnoir, *Combining reciprocity gap method and state estimator for source identification in an advection diffusion equation*, The SMAI Journal of computational mathematics **11** (2025), 233–260.

1. Notons que l'ajout d'un terme de réaction ne pose aucune difficulté.